Demonstratio Prop. XXXII Lib. I:mi
Elementorum Euclidis,

quam,

Annuente Facultate Philosophica,

Præside

CAROLO JOH. D:s HILL,
Math. Prof. Ord.,

pro Laurea capessenda

publice in Audit. Mathem. die XV Junii MDCCCXLVII ventilandam

proponit

FREDERICUS RUDOLPHUS ASK,
Scanus.

I.

Lundæ,
typis Berlingianis,
MDCCXLVII.

Demonstratio Prop. 32. Lib. I. Eucl.

Facillima fit, si Euclidæam rectanguli definitionem (31) agnoscimus, (Fig. 18.) indeque parallelarum theoria in promtu erit.

Sit enim $ABCD$ rectangulum, seu figura quadrilatera quorum anguli omnes recti sunt, ideoque summam $= 4R$ conficiunt, eritque ob angulos oppositos æquales etiam latera opposita æqualia (ut alibi v. not. p. 63 ostendemus), nempe $AD = BC$ et $AB = DC$. Ducta igitur diagonali BD, triangula ABD et CDB obtinemus, quorum tria latera ideoque anguli (1: 8) æqualia sunt; nempe $\wedge\, ABD = CDB = B'$, atque $ADB = CBD$, seu $D^0 = B^0$, quæ ideo $B' + D^0$ simul $B' + B^0$ seu rectum ABC æquant, ideoque rectum conficiunt angulum. In triangulo igitur ad A rectangulo reliqui anguli $D^0 + B'$ rectum efficiunt. Idemque de quocumque alio valebit, cum pars rectanguli cujusdam habeatur. Jam vero proposito triangulo quocunque, ipsum in duo rectangularia resolvere licet, quorum utriusque anguli acuti rectum efficiunt. Quoniam vero illi simul trianguli constituunt angulos, horum summa certe duo rectos efficiet. *Q. E. D.* — Quæ cum ita sunt, cetera facile expedientur.

Schol. Si vel omnia rectangula haud ejusmodi Euclidæa dixeris, tamen unico concesso innumera similia construes. (Fig. 10 inf.)

Sit enim $ABba$ quatuor rectis angulis præditum, producasque latera AB et ab opposita multipliciter $AB = BC = CD$ etc., atque $ab = bc = cd$ etc., jungasque Cc, Dd etc., eruntque $BbcC$, $CcdD$ etc. ipsi $AabB$ continue congrua, ideoque anguli C et c recti, similiterque D et d recti e. s. p. Quare $ACca$, $ADda$ etc. ejusmodi sunt rectangula. Rursum bisecando AB et ab in A' et a', similiter congrua

invenies $\overline{A'Aaa'}$ et $\overline{A'Bba'}$, ideoque anguli ad A' et a' contigui æquales, ideoque recti. Iterata vice ita bisecando nova rectangula Euclidæa invenies, quæ, præcedenti modo multiplicentur. Similis vero constructio lateribus Aa et Bb applicari potest, sicuti rectangulis jam inventis.

Cor. Hinc vero autumare licet, ejusmodi rectanguli latera ubique æque invicem sibi distare. Saltem cuique puncto P dato aliud p ipsi quam proximum exhibere licet, de quo hoc valeat. Si enim rationem $AP:AB$ quam proxime per $m:2^n$ exhibueris, sumserisque $Ap:AB = m:2^n$, erit sane Pp data minor. Sed hoc indicasse sufficiat. Patet enim, istam difinitionem minus bene sibi constare *).

Wahl in sua epicrisi p. 40. theoriam parallelarum a Krausio indicatam atque a Thibaut stabilitam inter omnes sibi cognitas eminere censet, quamquam ipsam sua censura perstringat, atque axioma, quo nititur, genuinum haud censeat. Hoc vero supponit, motum progressivum et rotatilem a se invicem non pendere, — progressionem igitur directionis mutationem haud efficere, — idemque ergo esse, utrum variæ rotationes circa idem punctum, an progressione quadam interea instituta circa diversa peragantur. Hoc vero fundamento Prop. 32. 1. ita demonstratur (Fig. 13). Sit ABC triangulum quodcunque, hujusque fines ab A ordine AB, BC, CA percurramus. Dum ab A ad B progredimur, in directionem $AB\beta$ (producta AB in β) semper spectamus, nullam rotationem peragentes; cum vero in B perventum fuerit, a directione priori $B\beta$ deflectendum nobis erit, rotando per angulum βBC, donec in directionem $BC\gamma$ spectemus. Deinde in hac $BC\gamma$ procedimus usque ad C, ubi rursum a $C\gamma$ ad $CA\alpha$ deflectendum erit per angulum γCA, tandemque accedentes ad A a directione $A\alpha$ in primam AB per angulum externum αAB deflectendum erit. Quo

---

*) Mireris forsan, D:n C. F. Schweikart, qui notione rectanguli Euclidæa nisus theoriam æquidistantium quæsiverit, hanc viam haud reperisse.

peracto, integram, æque ac si in eodem puncto persistentes nos complete convertissemus, perfecimus circumvolutionem, cujus mensura quatuor angulos rectos ($= 4R$) æquat. Quæ cum ita sint, trianguli anguli externi simul $\beta BC + \gamma CA + \alpha AB$ aperte $4R$ efficiunt, ideoque, his $4R$ a $6R$ in A, B et C detractis, interni istis contigui $2R$ æquant. *Q. E. D.*

Schol. 1. Hanc rem etiam ita proponere liceret, ut primo triangulum ABC infinite parvum poneremus, quo casu Lineam $A\beta$ circa punctum quoddam P medium trianguli volveretur, (in cujus locum deinde absque errore ambitus trianguli ABC sufficeretur), gyrum integrum describens, et quidem per partes, ut primo angulum βBC, deinde γCA, tandemque αAB pervagaret, unde hi simul gyro vel $4R$ æquales fierent, ideoque anguli interni $A + B + C = 2R$. Deinde vero majus quodcunque triangulum ex talibus infinite parvis componeretur, similisque angulorum affectio ostenderetur.

Schol. 2. Hæc demonstratio etiam inde corroborari videtur, quod progressio atque rotatio quantitatibus diversi generis metiantur, illa nempe linea hæcque angulo, unde earum diversitas atque independentia eluceat. Simili vero ratiocinio demonstrationem ejusdem Prop. D:ni Le Gendre (et Crelle?) defendere liceret; qui, exinde quod duo anguli cum uno latere (per 1: 26) tertium angulum definiunt, hoc latus a tribus angulis minime pendere concludit, indeque colligit, duobus duorum Triangulorum angulis æqualibus existentibus tertios quoque inter se æquales fore. Contra quam vero merito cnimadverti potest, suo ratiocinio demonstrari angulos sphæricos a lateribus haud pendere, et tertium latus a duabus lateribus determinari, — præter hoc, quod functionum signa et principia in elementa introducat. — Potius igitur phoronomia nonnulla sua principia ex Geometria demonstrata requirit. Nihilominus, si quid ex illa mutuare licet, rem ita forsan simpliciter proponere licet. Nempe:

1) Axioma. Dum figura rectilinea data aliqua in plano circumvertitur, omnes suæ lineæ eundem angulum describunt, — vel saltem hoc de cruribus anguli dati volventis valet. Quod etiam, cum gy-

ratio circa apicem fit, facile explicatur. Sit enim ABC angulus datus ($=d$), qui gyrando in situm $A'BC'$ transiit. Erit igitur $A'BC'=$ $=d=ABC$, ideoque ablato (vel addito) communi $A'BC$, erit $CBC'=$ $=ABA'$, seu anguli inter utrumque crus in primo et secundo situ æquales. (Fig. 7).

2) Jam angulus ABC circa punctum D cruris (producti) AB volvendo in $A'B'C'$ transeat, ut angulus D crurum AB et $A'B'$ æqualis sit angulo E crurum CB et $C'B'$, gyrati $B=B'$. Quæ cum ita ex axiomate sint, contendimus, triangula, quorum duo anguli invicem æquales sunt, etiam tertiis æqualibus gaudere. Sint enim illa EFB et DFB', atque ang. $F=F$ et $B=B'$ sibi opponantur, ut æquales F verticales fiant. Angulus igitur $B=B'$ gyrando circa D in $A'B'C'$ transiisse censeatur, ideoque necessario anguli inter crura in utroque situ E et D, qui triangulorum tertii sunt, æquales sint. (Fig. 14).

3) *Jam angulos parallelarum alternos* (l. in- et externos) *æquales contendimus* (Fig. 15). Sint enim BC et DE parallelæ per 1: 27 (vel connormales), factis ang. ABC et ADE æqualibus, atque angulos quosvis similes $AB'C$ et $AD'E$ ad transversalem quamcunque AB' sitos æquales prædicamus. Quoniam enim triangulorum ABB' et ADD' duo angulorum paria A et B atque A et D æqualia sunt, etiam tertius illius angulus $AB'B$ tertio hujus $AD'D$ æqualis sit. Vel brevius ita: 2) (Fig. 16) Sit ABC angulus rectus in $A'B'C(=R)$ circa C gyratus, eritque ex axiomate angulus αAB æqualis ipsi C; ideoque si in trapezio duo anguli recti fuerint, reliqui contiguis ad A ideoque duobus rectis æquales erunt. In rectangulo igitur quocunque angulorum summa $4R$ efficiet, ideoque in triangulo $2R$. Vel etiam hinc connormales innumeris gaudere directricibus ostendes, ideoque angulis alter-

nis ubique æqualibus. Vel etiam facile cum D:no Crelle ex 2) demonstres Pr. 32. — Quæ omnia ex rotationis regulis petita videntur. Sed etiam ex unica progressionis notione res probetur: — Cum enim corpus vel figura aliqua ex loco in locum progressum fecerit, omnia ipsius puncta æqualem progressum fecisse æquum est *); absonum enim foret, pedibus stadium promotis, caput in eodem loco manere. Progressus igitur hoc axioma valet, quæque puncta æqualem facere progressum. Sic, linea AB.. (Fig. 10) in sua directione in CD.. progressa ut A in C et B in D veniat, sit via $AC = BD$, quod etiam inde probatur, quod identice sit $CD = AB$, ideoque (sublata l.) addita communi BC, $AC = BD$, sicuti contendimus. Sed hoc idem valeat, cum recta ABC lateraliter in rectam abc progressa fuerit, ut scilicet distantiæ quorumcumque punctorum $Aa = Bb = Cb$ æquales sint, ideo-

*) Hoc principium vel inde elucet, quod gyratio in eo a progressu differat, quod puncta corporis diversa inæqualiter in illa moveantur, in hoc vero æqualiter — vel etiam inde, quod progressus sit gyratio circa punctum infinite dissitum. Quam notionem si concesseris, rem ita demonstremus. Sit nempe Fig. 17. primo PQ linea recta vel curva, quæ in plano circa centrum C rotetur per angulum quendam α, quo in situm pq transeat, quibusvis ipsius punctis P, Q describentibus arcus Pp, Qq. Quibus positis, puncta a centro C magis dissita majores arcus describere, contendimus. Sit enim radius QC major ipso PC, eritque, quia ang. $PCp = \alpha = QCq$, (ut modo indicavimus), aperte arcus $Qq > Pp$, (quod facile fusius demonstres). Jam vero transeat centrum C in distantiam infinitam, ideoque gyratio in simplicem progressum, et arcus Qq, Pp in rectas lineas, quo casu adhuc quidem videtur $Qq > Pp$ esse. Sed æquo jure in progressu centrum e regione opposita supponatur, tumque $Qq < Pp$ foret. Neutrum igitur valere potest, sed necessario $Qq = Pp$ sit, seu cujuscunque puncti progressus æquales; quare linea recta progressive promota immotæ æquidistans est, eaque rursum recta.

que inverse rectæ æquidistans ipsa recta sit. Quod et Geometrice hoc valet, ut data figura quadrilatera *ABba*, in qua opposita latera $AB = ab$ et $Aa = Bb$ æqualia sunt, horum uno pari $AB = ab$ æque in $BC = bc$ producto, nova puncta C, c eadem gaudeant distantia $Cc = Aa$. Unde æquidistantium ideoque et parallelarum facile petas theoriam.

Aliter, et quidem ex circuli et infiniti natura etiam propos. 32 demonstratio peti potest; his tamen præmissis principiis:

1) Duos circulos sese utrobique sub eodem angulo secare. 2) Circulum infiniti radii rectam valere lineam. 3) Prop. 13 et 15 ad circulos extendi. Secant (Fig. 20) enim tres circuli $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ et $\alpha\gamma$ sese invicem, constituentes triangulum curvilineum $\alpha\beta\gamma$, sibique occurrentes in eodem puncto δ, facientque hujus anguli $\alpha+\beta+\gamma$ simul duos rectos angulos. Quia enim $\gamma=\delta$, $\alpha=\delta'$ et $\beta=\delta''$, fit $\alpha+\beta+\gamma=\delta+\delta'+\delta''=2R$. Jam vero punctum δ infinite longuinquum ponatur, fietque $\alpha\beta\gamma$ rectilineum. — Sed hoc nimis longuinque petitum dicas, jam igitur ad demonstrationes rigorosius geometricas transeundum.

Prop. 1. Probl. *Dato Triangulo quocunque ABC, innumera alia construere, quæ eadem angulorum gaudet summa.*
(Fig. 22.)

Fiat constructio ab Euclide in Pr. 16 adhibita, (cujus videas figuram) bisecetur scilicet AC in E, producatur $BE = EF$ etc.; et duce Euclide Triangulum ECF ipsi EAB congruet, ut sit angulus $ECF = A$, $\wedge EFC = EBA$, et igitur, additis $ECB + EBC$, $EFC + ECF + ECB + EBC = A + EBA + EBC + ECB$, seu trianguli FCB anguli $EFC + FCB + CBE =$ ipsis $A + ABC + ACB$ Trianguli dati æquales erunt, (quia aperte $ECF + ECB = FCB$ et $EBA + EBC = ABC$ conficiunt). Similiter, juncta AF, Trianguli ABF anguli eandem efficient summam ac illi ipsius ABC. Itemque bisecta AB vel BC, ad utramque duo ejusmodi construentur triangula; et igitur sex jam habentur, quorum utrumque similiter tractare licet; e. s. p.